Devoir surveillé n°1 le 22/09/12

Calculatrices autorisées

On définit une suite (u_n) de réels par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où :

$$f(x) = x - x^3.$$

Partie I *Résultats généraux*

1. *En supposant* que la suite (u_n) converge, quelles sont les valeurs possibles pour sa limite ? Donner un exemple de u_0 pour lequel la suite (u_n) n'est pas convergente.
2. On suppose $0 < u_0 < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et admet pour limite 0.
   Que peut-on dire du cas où $-1 < u_0 < 0$?
3. Si $|u_0| > \sqrt{2}$, démontrer que la suite $(|u_n|)$ est croissante. Peut-elle être convergente ?
4. Indiquer une procédure *Maple non récursive* suite(u0,n) prenant pour arguments le réel u_0 et l'entier naturel n et effectuant le calcul de u_n.

Partie II *Étude de* $\sum u_n$ *lorsque* $0 < u_0 < 1$.

On suppose dans toute cette partie que $0 < u_0 < 1$.

1. On pose $r_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que r_n est bien défini.
   Démontrer que la suite (r_n) est convergente et monotone. Préciser sa limite et son sens de variations.
2. On pose $t_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $t_n = r_n(1 + r_n)$.
   (b) En déduire que la suite (t_n) est monotone et convergente vers 2.
3. On pose $s_n = \frac{1}{n}(t_0 + ... + t_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que la suite (s_n) est monotone et convergente.
   (b) En utilisant $2s_{2n} - s_n$, préciser la limite de (s_n).
4. Démontrer que la suite (nu_n^2) converge vers une limite réelle que l'on précisera.
5. En déduire un équivalent de (u_n). La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
   Que peut-on dire de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Partie III *Étude de* $\sum (-1)^n u_n$ *lorsque* $0 < u_0 < 1$.

On suppose toujours que $0 < u_0 < 1$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2}$.
2. En déduire un DL généralisé de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ à la précision $o\left(u_n^3\right)$.
3. Que peut-on dire de la série de terme général $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - 2$?
   Démontrer que $\frac{1}{u_n^2} - 2n \sim \frac{3}{2} \ln n$.
   [*Indication* : on procédera comme dans le TD sur la formule de STIRLING.]
4. En déduire un DL généralisé à deux termes non nuls de u_n.
   La série $\sum (-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

Partie IV *Étude de* $\sum \frac{1}{u_n^2}$ *lorsque* $\sqrt{2} < u_0$.

On suppose désormais que $u_0 > \sqrt{2}$.

1. On pose $v_n = u_n^2$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(v_n - 1)^3 < v_{n+1} - 1$ et $v_{n+1} < v_n^3$.
3. On pose $a_n = \sqrt[3^n]{v_n - 1}$ et $b_n = \sqrt[3^n]{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones et convergentes.
   On pose $\alpha = \lim(a_n)$, $\beta = \lim(b_n)$. Démontrer que : $1 < \alpha \leqslant \beta$.
   (b) Que peut-on dire de la différence $b_n^{3^n} - a_n^{3^n}$?
   En déduire que $\alpha = \beta$.
   [*Indication* : on pourra raisonner par l'absurde en supposant $\gamma = \beta - \alpha > 0$, et utiliser judicieusement la formule du binôme.]
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n - \alpha^{3^n} < 1$.
   En déduire des équivalents de (v_n) puis de (u_n).
5. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de $\left(\frac{1}{v_n}\right)$?
   La série $\sum \frac{1}{v_n}$ est-elle convergente ?
6. On pose $u_0 = 2$. Quel est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de v_{20} ?
   [*Indication* : on utilisera α pour effectuer un encadrement dont on justifiera la précision.]
