PCSI - exercices de mathématiques

Fonctions dérivables

1 Notion de dérivée

Exercice 1

1. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour tout $t \neq 0$,
$$f(t) = t \sin \frac{1}{t}.$$
   (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) f est-elle dérivable à gauche (*resp.* à droite) en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?

2. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et pour tout $t \neq 0$,
$$g(t) = t^2 \sin \frac{1}{t}.$$
   (a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(t)$ pour $t \neq 0$ et pour $t = 0$.
   (b) La fonction dérivée g' a-t-elle une limite quand $t \to 0^+$? Quand $t \to 0^-$? Quand $t \to 0$?

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit
$$h : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ t & \mapsto -(t-a)^2 & \text{si } t < a \\ t & \mapsto \ \ (t-a)^2 & \text{si } t \geq a \end{array} \right.$$
   (a) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction dérivée h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 *(fonction "smooth")*

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et pour tout $t \neq 0$,
$$f(t) = \mathrm{e}^{-1/t^2}.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(t)$ est de la forme $\frac{P_n(t)}{t^{3n}} f(t)$, où P_n est une fonction polynômiale. [On procédera par récurrence sur n, sans chercher à expliciter P_n.]
3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que donne la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 pour f ?

Exercice 3

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et pour tout $t \neq 0$,
$$g(t) = \mathrm{e}^{-1/t^2} \sin \left(\mathrm{e}^{1/t^2} \right).$$
Déduire de l'ex. 2 que $g(t) = o(t^n)$ $[t \to 0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ([1]).

2. On pose pour $p \in \mathbb{N}$: $g_p(t) = t^p g(t)$.
   (a) Démontrer que g_p est continue en 0.
   (b) Démontrer que $g_p(t) = o(t^n)$ $[t \to 0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ([1]).
   (c) Démontrer que g_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'_p(t)$ pour $t = 0$ et pour $t \neq 0$.
   (d) Démontrer que g_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ *ssi* $p \geq 4$.
   (e) Démontrer que g_4 n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 4

1. On pose $s_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Démontrer que la suite (s_n) est décroissante et qu'elle admet dans $\mathbb{R}$ une limite $S \geq \frac{1}{2}$.

2. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est dérivable à droite en 0. On pose $f'_d(0) = \lambda$.

   On définit la suite $(\sigma_n(f))$ par $\sigma_n(f) = \sum_{i=0}^n f(\frac{1}{n+i})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Démontrer que $(\sigma_n(f))$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et que $\lim(\sigma_n(f)) = \lambda S$.

3. En appliquant 2. à $t \mapsto f(t) = \ln(1+t)$, calculer S.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{i=0}^n \sin(\frac{1}{n+i})$.

Exercice 5

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une application n fois dérivable sur I (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
Exprimer à l'aide de f, f', ..., $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

(a) $t \mapsto t\, f(t)$;
(b) $t \mapsto t^2 f(t)$ (avec $n \geq 2$) ;
(c) $t \mapsto t^3 f(t)$ (avec $n \geq 3$) ;
(d) $t \mapsto \frac{1}{t} f(t)$ (avec $n \geq 1$) (sur $I \setminus \{0\}$).

[On utilisera la formule de Leibniz.]

Exercice 6

1. Démontrer que pour tout $t \in \,]0,1[$ on a :
$$1 + t < \mathrm{e}^t < \frac{1}{1-t}.$$
[Pour ce genre de démonstration, faire des tableaux de variations.]

[1] Ainsi, cette fonction a un DL à tout ordre en 0, dont la partie régulière est nulle, *cf.* le cours sur les développements limités.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du 1. déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{i=n}^{kn} \frac{1}{i}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

3. En particulier, déterminer $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+i} \right)$.

Exercice 7

Pour chacune des fonctions $t \mapsto f(t)$ suivantes déterminer le domaine D, la dérivée $f'(t)$ pour $t \in D$, le signe de $f'(t)$ sur D :

1. $f(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$; 2. $f(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$;
3. $f(t) = \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}$; 4. $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$;
5. $f(t) = \frac{2t^2-1}{t\sqrt{1+t^2}}$; 6. $f(t) = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}$;
7. $f(t) = t \ln t - t$; 8. $f(t) = \ln(\ln t)$;
9. $f(t) = \ln(\ln(\ln t))$;
10. $f(t) = \ln(t + \sqrt{h + t^2})$ pour (a) $h > 0$ (b) $h < 0$;
11. $f(t) = t^t$; 12. $f(t) = t^{t^t}$ (c'est à dire $f(t) = t^{(t^t)}$, puisque $(t^t)^t = t^{t^2}$).

Exercice 8

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(t) = t^{n-1} \ln t$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f_n^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!}{t}$$

[On raisonnera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.]

Exercice 9

Démontrer que si $x \in \,]0, +\infty[$ et si $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$xy \leq x \ln x + \mathrm{e}^{y-1} .$$

[On définira une fonction appropriée à l'étude de cette inégalité, et on étudiera ses variations.]

Exercice 10

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.
Démontrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$1 + x^\alpha y^\beta \leq (1+x)^\alpha (1+y)^\beta .$$

[*Indication* : Utiliser la fonction f définie pour $t \in \,]0, +\infty[$ par $f(t) = (t-x)^\alpha (t-y)^\beta - t - x^\alpha y^\beta$.]

Exercice 11

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient a_0, ..., $a_{p-1} \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \, t^i$.
   Constater que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que $f^{(p)} = 0$.

2. Réciproquement soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur I, p fois dérivable sur $\mathring{I}$ et telle que $f^{(p)} = 0$. Démontrer qu'il existe a_0, ..., $a_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in I$: $f(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \, t^i$.

2 Accroissements finis

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

1. Démontrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$ où $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $l > 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Démontrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$ où $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $l < 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. Démontrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 13

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I.

1. Soient a, $b \in I$ (avec $a \neq b$). On pose $p(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ pour $t \neq a$ et $q(t) = \frac{f(t)-f(b)}{t-b}$ pour $t \neq b$.

   (a) Déterminer $p(a)$ et $q(b)$ pour que p et q soient continues sur I.

   (b) En déduire que pour tout $y \in [f'(a), f'(b)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que: $y = f'(x)$.

2. En déduire que $f' \langle I \rangle$ est un intervalle.

   (Ainsi, *une fonction dérivée vérifie, même si elle n'est pas continue, le théorème des valeurs intermédiaires.*)

Exercice 14

1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Démontrer que si $f(a) = f(b) = 0$ il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
   Interprétation géométrique ?

2. Soit $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et soit $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, b]$ et dérivable sur $]0, b[$. On suppose que $f(0) = f'(0) = f(b) = 0$. Même question.

Remarque générale pour la résolution des exercices suivants (15 à 18) : procédure à suivre pour démontrer qu'une expression est "de la forme $f^{(n)}(c)$".

1. Tout mettre du même côté du signe =, chasser les dénominateurs non constants.

2. Remplacer "l'inconnue" $f^{(n)}(c)$ par un paramètre A; remplacer l'une des variables (a, b, h...) par t ; appeler $\varphi(t)$ le résultat (fonction auxiliaire).

3. Choisir A tel que φ(ce qu'il faut[2]) $= 0$.

4. Appliquer le théorème de ROLLE autant de fois que nécessaire.

[2] C'est à dire la lettre qu'on a remplacée par t.

Exercice 15

Soit f une application continue sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$. $(a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

On suppose que $f(a) = f(b) = 0$.

Démontrer que si $x \in\ ]a, b[$ il existe $y \in\ ]a, b[$ tel que :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(y).$$

Exercice 16

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Soient $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

Démontrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que :

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) \\ f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 17 *(formule d'*Euler-MacLaurin*)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, trois fois dérivable sur $]a, b[$.

Démontrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(c).$$

Exercice 18 *(formule de* Simpson*)*

1. Soient $a > 0$ et $g \in \mathcal{C}^5([-a, a])$, *impaire.*

   Démontrer que pour tout $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$ il existe $c \in\ ]0, x[$ tel que :

   $$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}g^{(5)}(c).$$

2. Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^5$ sur $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que :

   $$f(b) = f(a) + \tfrac{b-a}{6}(f'(a) + f'(b) + 4f'(\tfrac{a+b}{2})) - \tfrac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(c).$$

   [On utilisera $g(t) = f(\frac{a+b}{2} + t) - f(\frac{a+b}{2} - t)$ sur $[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$.]

Exercice 19 *(Règle de* l'Hospital[3]*)*

Soient $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et soient $f,\ g$ deux applications définies sur le voisinage $I =\ ]a-r, a+r[$de a, continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$. On suppose :

(i) $f(a) = g(a) = 0$
(ii) g' ne s'annule pas sur $]a-r, a+r[\ \setminus\ \{a\}$
(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (où $l \in \overline{\mathbb{R}}$)

1. Démontrer que g ne s'annule pas sur $]a-r, a+r[\setminus \{a\}$.
2. Démontrer que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. *Application* : déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

[3]Guillaume François Antoine de l'Hospital, 1661-1704.

Exercice 20 *(pseudo-dérivée seconde)*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application, a un point intérieur à I.

Pour tout réel non nul h tel que $a + h \in I$ on pose :

$$D_f(a, h) = \frac{1}{h^2}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)).$$

(Comme il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\ \subset I$, $h \mapsto D_f(a, h)$ est définie sur $]-r, 0[\ \cup\ ]0, r[$.)

1. Démontrer que si f est deux fois dérivable en a on a :

   $$\lim_{h\to 0} D_f(a, h) = f''(a).$$

2. Dans les exemples suivants, constater que f n'est pas deux fois dérivable en a, mais que $D_f(a, h)$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$:

   (a) $a \in \mathring{I}$ et pour tout $t \in I$:
   $f(t) = -(t-a)^2$ si $t < a$, $f(t) = (t-a)^2$ si $t \geq a$.

   (b) $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(0) = 0$, $f(t) = t^2 \sin(\frac{1}{t})$ si $t \neq 0$.

Exercice 21

Ecrire la formule de Taylor-Young aux ordres 1, 2 et 3 en 0 pour les fonctions :

(a) $x \mapsto f(x) = \sin x$;
(b) $x \mapsto f(x) = \cos x$;
(c) $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^x$;
(d) $x \mapsto f(x) = \operatorname{sh} x$;
(e) $x \mapsto f(x) = \operatorname{ch} x$;
(f) $x \mapsto f(x) = \ln(1+x)$;
(g) $x \mapsto f(x) = \tan x$.

Exercice 22

Pour chacune des fonctions suivantes, définies au départ sur $I \setminus \{0\}$, déterminer $f(0)$ pour que f soit continue sur I et démontrer qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I :

(a) $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;
(b) $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$;
(c) $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$;
(d) $I =\ ]-1, +\infty[$; $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

[On utilisera l'exercice précédent.]