

PCSI - mathématiques

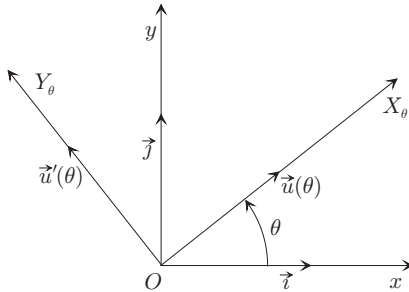
Courbes “en polaires”

\mathcal{P} est le plan affine euclidien orienté usuel. $O = (0, 0)$ est l'origine ; $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. $\mathcal{R} = (O; (\vec{i}, \vec{j}))$ est le repère canonique (orthonormal direct). \mathcal{P} est le plan vectoriel euclidien. Le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$.

1 Coordonnées polaires

On définit :

$$\vec{u} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ \theta & \mapsto & \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \end{cases}$$



- \vec{u} est \mathcal{C}^∞ , 2π -périodique et $\vec{u}(\theta + \pi) = -\vec{u}(\theta)$
- $\vec{u}'(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$ aussi noté $\vec{v}(\theta)$.

On calcule en outre pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $(\vec{u}(\alpha) | \vec{u}(\beta)) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ soit

$$(\vec{u}(\alpha) | \vec{u}(\beta)) = \cos(\alpha - \beta)$$

- $(\vec{u}(\alpha) | \vec{u}'(\beta + \frac{\pi}{2})) = \cos(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2})$ soit

$$(\vec{u}(\alpha) | \vec{u}'(\beta)) = \sin(\alpha - \beta)$$

Définition 1 Si $M \in \mathcal{P}$, un système de coordonnées polaires de M dans \mathcal{R} est un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = O + r \vec{u}(\theta)$.

2 Courbes “en polaires”

I est un intervalle de \mathbb{R} . $\rho, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications \mathcal{C}^k sur I , $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

On considère l'arc γ image du paramétrage

$$F : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathcal{P} \\ t & \mapsto & F(t) = O + \rho(t) \vec{u}(\theta(t)) \end{cases}$$

$F(t)$ est le point de \mathcal{P} dont un s.c.p. dans \mathcal{R} est $(\rho(t), \theta(t))$.

2.1 Vitesse et accélération

On calcule dans le cas général les vecteurs dérivés d'ordres 1 et 2 (si $k \geq 2$) de $F(t)$:

- $\vec{F}'(t) = \rho'(t) \vec{u}(\theta(t)) + \rho(t) \theta'(t) \vec{u}'(\theta(t))$;
- pour $\vec{F}''(t)$ on se rappelle que $\vec{u}'' = -\vec{u}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}''(t) &= \rho''(t) \vec{u}(\theta(t)) + \rho'(t) \theta'(t) \vec{u}'(\theta(t)) \\ &\quad + \rho'(t) \theta'(t) \vec{u}'(\theta(t)) + \rho(t) \theta''(t) \vec{u}'(\theta(t)) \\ &\quad + \rho(t) (\theta'(t))^2 \vec{u}''(\theta(t)) \\ &= (\rho''(t) - \rho(t) (\theta'(t))^2) \vec{u}(\theta(t)) \\ &\quad + (2\rho'(t) \theta'(t) + \rho(t) \theta''(t)) \vec{u}'(\theta(t)) \end{aligned}$$

On approfondit l'étude locale uniquement lorsque “ θ ” est le paramètre : $M = O + r \vec{u}(\theta)$ où $r = \rho(\theta)$. On note $r' = \rho'(\theta)$ et $r'' = \rho''(\theta)$. Dans ce cas, les expressions précédentes se réduisent à :

- $\vec{F}'(\theta) = r' \vec{u}(\theta) + r \vec{u}'(\theta)$;
- $\vec{F}''(\theta) = (r'' - r) \vec{u}(\theta) + 2r' \vec{u}'(\theta)$.

2.2 Etude locale

Soit $\theta_0 \in I$; on étudie γ image de $\theta \mapsto M = F(\theta) = O + r \vec{u}(\theta)$ au voisinage de $M_0 = F(\theta_0)$.

Cas 1 $M_0 = O$ (càd $r = \rho(\theta_0) = 0$)

La droite $(OF(\theta)) = O + \mathbb{R} \vec{u}(\theta)$ est dirigée par $\vec{u}(\theta)$ et $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \vec{u}(\theta) = \vec{u}(\theta_0)$ donc comme, pour tout θ , $(OF(\theta))$ passe par le point fixé O : la droite $(OF(\theta))$ admet pour limite $O + \mathbb{R} \vec{u}(\theta_0)$ quand $\theta \rightarrow \theta_0$, autrement dit :

la tangente à γ en $O = F(\theta_0)$ est la droite $O + \mathbb{R} \vec{u}(\theta_0)$.

Cas 2 $M_0 \neq O$ (càd $r = \rho(\theta_0) \neq 0$)

- $\vec{F}'(\theta_0) = r' \vec{u}(\theta_0) + r \vec{u}'(\theta_0) \neq \vec{0}$ (puisque $r \neq 0$) donc : $M_0 = F(\theta_0)$ est un point régulier de γ . (Autrement dit : le seul point stationnaire possible des courbes “ $r = \rho(\theta)$ ” est l'origine.)

- $\text{Det}(\vec{u}(\theta_0), \vec{F}'(\theta_0)) = \left| \frac{1}{r} r' \right| = r' \neq 0$ ($r = \rho(\theta_0)$) donc $(\vec{u}(\theta_0), \vec{F}'(\theta_0))$ est libre càd : la tangente à γ en $M_0 = F(\theta_0)$ ne passe pas par l'origine.

- Posons

$$\psi(\theta_0) = \widehat{(\vec{u}(\theta_0), \vec{F}'(\theta_0))}$$

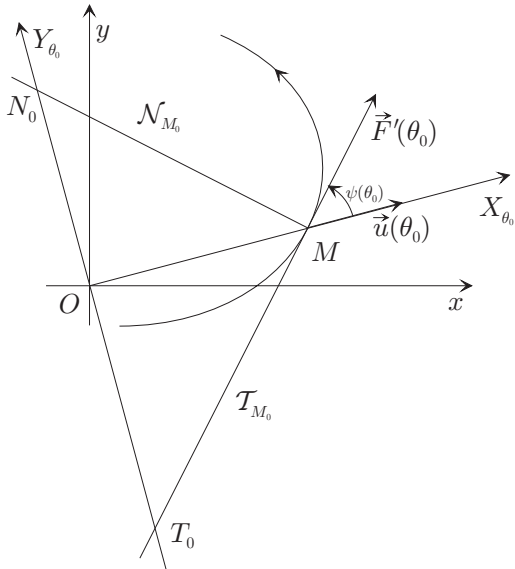
et notons $\mathcal{T}_{M_0} = M_0 + \mathbb{R} \vec{F}'(\theta_0)$ la tangente à γ en M_0 .
On constate que : $\mathcal{T}_{M_0} \perp \overrightarrow{OM_0} \Leftrightarrow r' = \rho'(\theta_0) = 0$.

$(\vec{u}(\theta_0), \vec{u}'(\theta_0))$ est une BOND de P donc
 $(\vec{u}(\theta_0) \mid \vec{F}'(\theta_0)) = \left\| \vec{F}'(\theta_0) \right\| \cos \psi(\theta_0) = r'$ et
 $\text{Det}(\vec{u}(\theta_0), \vec{F}'(\theta_0)) = \left\| \vec{F}'(\theta_0) \right\| \sin \psi(\theta_0) = r$:

$$\cos \psi(\theta_0) = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} ; \sin \psi(\theta_0) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Si $V = (\widehat{OM_0}, \mathcal{T}_{M_0})$: $\tan V = \frac{r}{r'}$.

- On se place dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0} = (O; (\vec{u}(\theta_0), \vec{u}'(\theta_0)))$.
Si $M \in \mathcal{P}$ on note $M = O + X \vec{u}(\theta_0) + Y \vec{u}'(\theta_0)$. \mathcal{T}_{M_0}
a pour équation $\mathcal{T}_{M_0} \mid \left| \begin{matrix} X & -r & r' \\ Y & r & r' \end{matrix} \right| = 0$ soit $\mathcal{T}_{M_0} \mid rX - r'Y - r^2 = 0$, et la normale en M_0 est $\mathcal{N}_{M_0} \mid r'(X - r) + rY = 0$ soit $\mathcal{N}_{M_0} \mid r'X + rY - rr' = 0$. Leurs points d'intersection avec l'axe OY_{θ_0} sont $T_0 : (X = 0 \text{ sur } \mathcal{T}_{M_0}) -r'Y - r^2 = 0$ soit $Y = -\frac{r^2}{r'}$: $\overrightarrow{OT_0} = -\frac{r^2}{r'} \vec{u}'(\theta_0) = \frac{1}{(\frac{r}{r'})} \vec{u}'(\theta_0)$; et $N_0 : (X = 0 \text{ sur } \mathcal{N}_{M_0}) : rY - rr' = 0$ soit $Y = r'$: $\overrightarrow{ON_0} = r' \vec{u}'(\theta_0)$.



2.2.1 Recherche des points d'inflexion

$M_0 \in \text{Im}(\gamma)$, $M_0 \neq O$, $M_0 = F(\theta_0)$.
On définit pour tout θ :

$$\delta(\theta) = \text{Det}(\vec{F}'(\theta), \vec{F}''(\theta))$$

donc : M_0 point d'inflexion $\Rightarrow \delta(\theta_0) = 0$.

$\delta(\theta) = \text{Det}(\vec{F}'(\theta), \vec{F}''(\theta))$ or $\vec{F}'(\theta) = r' \vec{u}(\theta) + r \vec{u}'(\theta)$
et $\vec{F}''(\theta) = (r'' - r) \vec{u}(\theta) + 2r' \vec{u}'(\theta)$ donc

$$\delta(\theta) = \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = r^2 + 2r'^2 - rr''$$

Remarque 1 $(\frac{1}{r})' = -\frac{r'}{r^2}$; $(\frac{1}{r})'' = -\frac{r''}{r^2} - \frac{r'(-2r')}{r^3} = \frac{2r'^2 - rr''}{r^3}$ et :

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3} = \frac{1}{r^3} \delta(\theta)$$

Ceci est utile si $\frac{1}{r}$ est plus simple à dériver que r .

Les points d'inflexion (autres que O) s'obtiennent donc pour $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$. On dérive :

$$\delta'(\theta) = \underbrace{\text{Det}(\vec{F}''(\theta), \vec{F}''(\theta))}_{=0} + \text{Det}(\vec{F}'(\theta), \vec{F}'''(\theta))$$

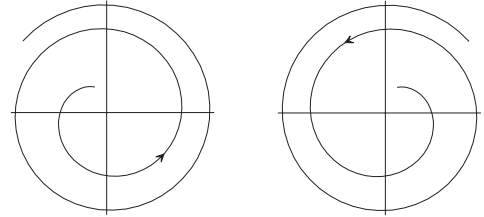
$$\delta''(\theta) = \text{Det}(\vec{F}''(\theta), \vec{F}'''(\theta)) + \text{Det}(\vec{F}'(\theta), \vec{F}^{(4)}(\theta))$$

- Si $\delta(\theta_0) = 0$ ($q \geq 3$: point d'inflexion ?)
 - si $\delta'(\theta_0) \neq 0$: disposition d'inflexion ($q = 3$)
 - si $\delta'(\theta_0) = 0$: $\delta''(\theta_0) = \text{Det}(\vec{F}'(\theta), \vec{F}^{(4)}(\theta))$
(car $\vec{F}''(\theta)$ et $\vec{F}'''(\theta)$ sont liés - à $\vec{F}'(\theta)$)
 - * si $\neq 0$: disposition ordinaire ($q = 4$)
 - * si $= 0$: ($q \geq 5$) on redérive etc.

2.3 Etude des branches infinies

$d(O, F(\theta)) = |r| = |\rho(\theta)|$ donc on aura une branche infinie pour $\theta \rightarrow \alpha^+$ (resp. $\theta \rightarrow \alpha^-$) ssi $|r|$ n'est pas majoré quand $\theta \rightarrow \alpha^+$ (resp. $\theta \rightarrow \alpha^-$). On envisage les cas particuliers suivants :

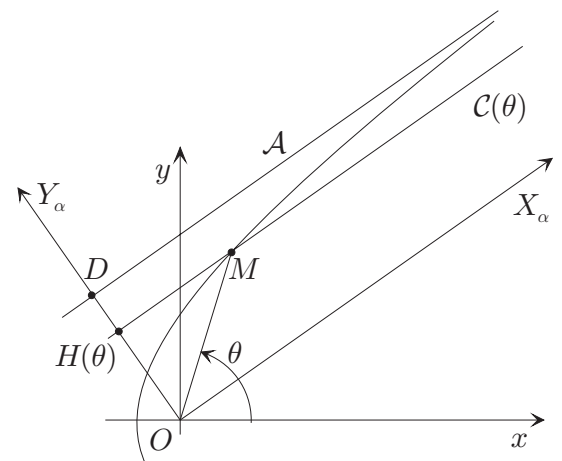
Cas 1 $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$: branches spirales



$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} f(\theta) = \pm\infty \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} f(\theta) = \pm\infty$$

Cas 2 $\lim_{\theta \rightarrow \alpha^\pm} \rho(\theta) = \pm\infty$

- $(OF(\theta)) = O + \mathbb{R} \vec{u}(\theta)$ et $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} \vec{u}(\theta) = \vec{u}(\alpha)$ donc $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} (OF(\theta)) = O + \mathbb{R} \vec{u}(\alpha)$: γ admet la direction asymptotique $\vec{u}(\alpha)$ quand $\theta \rightarrow \alpha$.



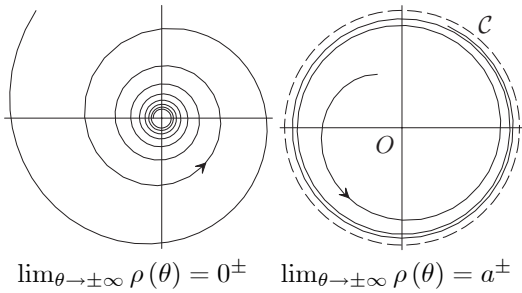
- Si $\theta \in I$ on définit $\mathcal{C}(\theta) = F(\theta) + \mathbb{R} \vec{u}(\alpha)$ et on pose $\mathcal{C}(\theta) \cap OY_\alpha = \{H(\theta)\}$. $\overrightarrow{OH}(\theta) = Y \vec{u}'(\alpha)$ où $Y = (\overrightarrow{OF}(\theta) \mid \vec{u}'(\alpha)) = r (\vec{u}(\theta) \mid \vec{u}'(\alpha)) = r \sin(\theta - \alpha)$:
$$\overrightarrow{OH}(\theta) = r \sin(\theta - \alpha) \vec{u}'(\alpha)$$

Pour résoudre cette forme indéterminée, on effectue en général un *développement limité*¹ en α de la quantité $r \sin(\theta - \alpha)$.

- Si $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} r \sin(\theta - \alpha) = \pm\infty$ on a une branche parabolique de direction $\mathbb{R} \vec{u}(\alpha)$.
- Si $\lim_{\theta \rightarrow \alpha} r \sin(\theta - \alpha) = d \in \mathbb{R}$ le point $H(\theta)$ admet pour limite $D = O + d \vec{u}'(\alpha)$ et la droite $\mathcal{A} = D + \mathbb{R} \vec{u}(\alpha)$ est asymptote à γ (\mathcal{A} a pour équation “ $Y = d$ ” dans $(O; (\vec{u}(\alpha), \vec{u}'(\alpha)))$).

2.4 Points et cercles asymptotes

- Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = 0^\pm$, $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} d(O, F(\theta)) = 0$: l'origine O est *point asymptote* à γ .
- Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = a^\pm$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) : $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} d(O, F(\theta)) = a^\pm$ et si $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O; a)$: le cercle \mathcal{C} est asymptote à γ .



3 Construction du graphe

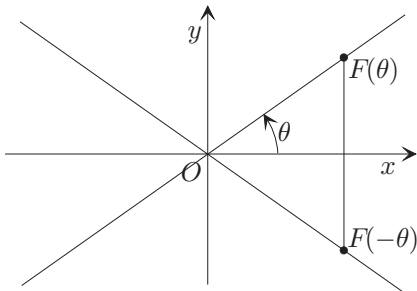
γ est l'image du paramétrage

$$F : \begin{cases} I & \rightarrow \mathcal{P} \\ \theta & \mapsto F(\theta) = O + r \vec{u}(\theta) \end{cases} \quad \text{où } r = \rho(\theta).$$

La 2π -périodicité de \vec{u} permet de réduire l'intervalle d'étude, si ρ présente une périodicité similaire. Sinon on peut appliquer les remarques suivantes :

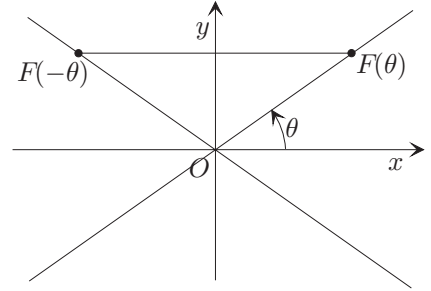
3.1 Symétries

1. $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$



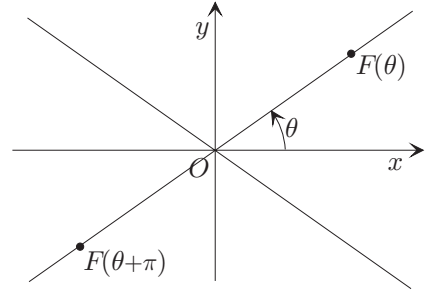
Le point de paramètre $-\theta$ est symétrique par rapport à Ox du point de paramètre θ .

2. $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$



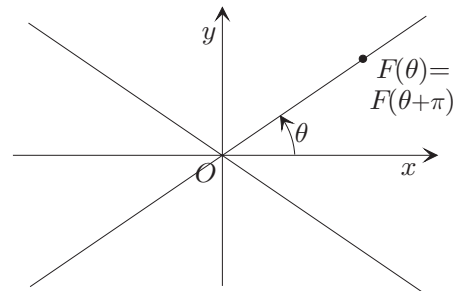
Le point de paramètre $-\theta$ est symétrique par rapport à Oy du point de paramètre θ .

3. $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$



Comme $\vec{u}(\theta + \pi) = -\vec{u}(\theta)$, le point de paramètre $-\theta$ est symétrique par rapport à l'origine O du point de paramètre θ .

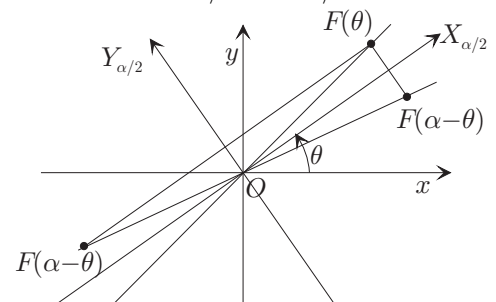
4. $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$



Le point de paramètre $-\theta$ est le même que le point de paramètre θ . Dans ce cas, π est effectivement période globale du paramétrage F .

5. $\rho(\alpha - \theta) = \rho(\theta)$ (resp. $-\rho(\theta)$)

On remarque que les bissectrices des axes OX_θ et $OX_{\alpha-\theta}$ sont les axes $OX_{\alpha/2}$ et $OY_{\alpha/2}$:



Le point de paramètre $\alpha - \theta$ est symétrique par rapport à $OX_{\alpha/2}$ (resp. $OY_{\alpha/2}$) du point de paramètre θ .

¹Voir cours d'analyse

Cette dernière situation englobe les cas 1. et 2. qui correspondent à $\alpha = 0$.

3.2 Périodicité

1. Supposons $T > 0$ période de ρ . On peut supposer que T est la période fondamentale, c'est-à-dire la plus petite période positive de ρ .

(a) $T = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^* : F(\theta + T) = O + \rho(\theta + T) \vec{u}(\theta + T) = O + \rho(\theta) \vec{u}(\theta) = F(\theta)$.

On obtient toute la courbe comme image d'un intervalle de longueur T .

(b) $T = \frac{2k\pi}{n}, k, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux : $F(\theta + T) = O + \rho(\theta + T) \vec{u}(\theta + T) = O + \rho(\theta) \vec{u}(\theta + T) = \text{rot}_T(F(\theta))$ où rot_T est la rotation affine de \mathcal{P} de centre O et d'angle T . Comme $(\text{rot}_T)^n = \text{Id}_{\mathcal{P}}$, on construit l'image d'un intervalle de longueur T et on lui fait subir des rotations d'angles $T, 2T, \dots, (n-1)T$.

(c) $T = a\pi, a \notin \mathbb{Q} : F(\theta + nT) = O + \rho(\theta) \vec{u}(\theta + nT) \neq F(\theta)$ pour tout n : on construit l'image d'un intervalle de longueur T et on lui fait subir des rotations d'angles $T, 2T, \dots, nT, (n+1)T, \dots$

Dans tous les cas on se ramène à la construction de l'image d'un intervalle de longueur T .

2. Supposons $\rho(\theta + \frac{T}{2}) = -\rho(\theta)$ (On dit que $\frac{T}{2}$ est antipériode de ρ .)

$$F(\theta + \frac{T}{2}) = O + \rho(\theta + \frac{T}{2}) \vec{u}(\theta + \frac{T}{2}) = O - \rho(\theta) \vec{u}(\theta + \frac{T}{2}) = O + \rho(\theta) \vec{u}(\theta + \pi + \frac{T}{2}) = \text{rot}_{\frac{T}{2} + \pi}(F(\theta))$$

l'image d'un segment de longueur T est obtenue en construisant l'image d'un segment de longueur $\frac{T}{2}$ et en lui appliquant une rotation d'angle $\frac{T}{2} + \pi$

On s'est ramené à construire l'image d'un segment de longueur T_1 où $T_1 = \frac{T}{2}$ si $\frac{T}{2}$ est antipériode de ρ , $T_1 = T$ sinon.

3. Supposons $\rho(\alpha - \theta) = \pm \rho(\theta)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ — éventuellement nul : cas où ρ est paire où impaire.

Si θ parcourt $[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{T_1}{2}]$, $\alpha - \theta$ parcourt $[\frac{\alpha}{2} - \frac{T_1}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ et la réunion de ces deux segments est un segment de longueur T_1 . On construit donc l'image de $[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{T_1}{2}]$ et on lui applique une symétrie par rapport à $OX_{\alpha/2}$ ou $OY_{\alpha/2}$ selon le cas.

Remarque 2 On pourrait aussi choisir $[\frac{\alpha}{2} - \frac{T_1}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ mais il est facile de voir qu'on ne peut pas prendre n'importe quel segment de longueur $\frac{T_1}{2}$.

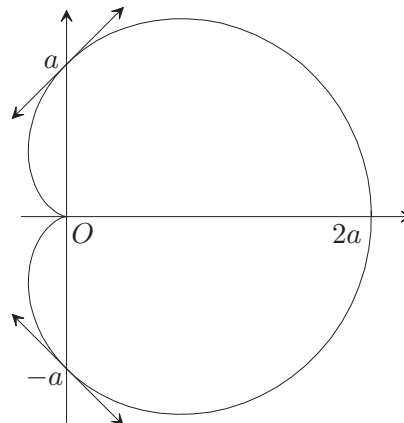
3.3 Exemples

1. Cardioïde $r = a(1 + \cos \theta)$

$T = 2\pi$ est période et $r(-\theta) = r(\theta)$: on étudie sur $[0, \pi]$ et on effectue la symétrie par rapport à Ox .

$$r'(\theta) = -a \sin \theta \leq 0 \text{ sur } [0, \pi].$$

| | | | |
|--------------|----|-----------------|-------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| $r'(\theta)$ | 0 | < 0 | 0 |
| r | 2a | a | 0 |



Le point stationnaire pour $\theta = \pi$ admet $\vec{u}(\pi) = -\vec{i}$ pour tangente. C'est donc nécessairement un point de rebroussement de première espèce à cause de la symétrie.

2. $r = a \frac{\theta}{\theta-1} (= a(1 + \frac{1}{\theta-1}))$.

$\mathcal{D}(r) = \mathbb{R} - \{1\}$; r n'est ni périodique ni paire ni impaire.

$$r'(\theta) = -\frac{a}{(\theta-1)^2} < 0$$

| | | | |
|--------------|-----------|----|-----------|
| θ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $r'(\theta)$ | < 0 | | < 0 |
| r | a | -∞ | +∞ |

Pour $\theta \rightarrow \pm\infty, r \rightarrow a$: il s'agit d'un cercle asymptote centré en O et de rayon a .

Pour $\theta \rightarrow 1$ il y a une branche infinie : on calcule $h(\theta) = r \sin(\theta - 1) = \frac{a\theta \sin(\theta-1)}{\theta-1} \xrightarrow{\theta \rightarrow 1} a$: il s'agit donc d'une asymptote \mathcal{A} dirigée par le vecteur $\vec{u}(1)$ et passant par $D = O + a\vec{u}'(1)$.

