PCSI - mathématiques

Matrices réelles et complexes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

n et p sont deux entiers naturels non nuls.

1.1 Définitions

Une *matrice à n ligne et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ est une famille $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, c'est à dire un $(n\times p)$-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.

Notation 1 *$A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$, ou plus brièvement $A = (a_{i,j})$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur les intervalles de variation de i et j.*

On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,j} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est isomorphe à $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, ou plus simplement à $\mathbb{K}^{np}$, est donc canoniquement un $\mathbb{K}$-ev pour les opérations suivantes :

- $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$;
- $\lambda (a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$.

Pour ces opérations, en particulier, la matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, et l'opposé d'une matrice $(a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$.

1.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si $k \in [\![1,n]\!]$ et $l \in [\![1,p]\!]$ on définit la matrice[1] $E_{k,l}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont l'unique coefficient non nul (qui vaut 1) est situé à l'intersection des $k^{\text{ième}}$ ligne et $l^{\text{ième}}$ colonne :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccccc} & & & (l) & & \end{array} & \\ E_{k,l} = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (k) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

[1] appelée *matrice élémentaire* d'indice (k,l)

Cela peut également s'écrire, sous forme plus condensée :

$$E_{k,l} = \left(\delta_k^i \delta_l^j\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}.$$

Proposition 1 *$\mathcal{E} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (base canonique) et si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la décomposition de A sur $\mathcal{E}$ s'écrit :*

$$A = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Corollaire 1 *$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.*

1.3 Transposition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *transposée* de A par ${}^tA = \left(a'_{j,i}\right)_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le i\le n}}$ où $a'_{j,i} = a_{i,j}$ pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$.

${}^tA$ est donc une matrice à p lignes et n colonnes : ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On peut la représenter par

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 2 *L'application $A \mapsto {}^tA$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et de plus, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a ${}^t({}^tA) = A$.*

1.4 Matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-ev des matrices à n lignes et n colonnes ("carrées") à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est donc un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2.

Donnons les définitions de quelques matrices carrées particulières :

- La *matrice identité* est définie par $I_n = \left(\delta_i^j\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

  On peut la représenter par

  $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Plus généralement si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on note

  $$\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

et on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si elle est de la forme précédente.

- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *symétrique* (*resp. antisymétrique*) si ${}^tA = A$ (*resp.* ${}^tA = -A$), càd si pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$ on a $a_{j,i} = a_{i,j}$ (*resp.* $a_{j,i} = -a_{i,j}$). Remarquons que si A est antisymétrique, alors $a_{i,i} = 0$ pour tout i.
- $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* (*resp. inférieure*) si $a_{i,j} = 0$ pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$ (*resp.* $i < j$).

1.5 Matrices-colonne, matrices-ligne

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Une telle matrice est appelée *matrice-colonne*. Il est facile de vérifier que

Proposition 3 *L'application*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-ev.*

Compte tenu de cet isomorphisme, on *identifie* $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en convenant que $x = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$. On observe que, dans cette identification, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ s'identifie à celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, on a $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Une telle matrice est appelée *matrice-ligne*. On a trivialement

Proposition 4 *L'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-ev.*

En outre

Proposition 5 *La transposition* $\mathbb{K}^n \to \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $X \mapsto {}^tX$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-ev de* $\mathbb{K}^n$ *(*$= \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*) sur* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$*. En particulier,* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) = \{{}^tX \mid X \in \mathbb{K}^n\}$.

2 Matrices représentatives

Les vecteurs, les familles de vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes peuvent être représentés par des matrices.

2.1 Matrice représentative d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{U} = (u_1, \ldots., u_n)$ une base de E. Soit $x \in E$.

Définition 1 *La* matrice représentative *de x dans $\mathcal{U}$ est*

$$\mathrm{mat}(x\ ;\ \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} u^{*1}(x) \\ \vdots \\ u^{*n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \ (\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})),$$

si la décomposition de x sur $\mathcal{U}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x^i u_i$.

Proposition 6 *L'application* $x \mapsto \mathrm{mat}(x\ ;\ \mathcal{U})$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-ev de E sur* $\mathbb{K}^n$ *(*$= \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*) et de plus, pour* $i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{mat}(u_i\ ;\ \mathcal{U}) = e_i$ *(*$i^{\text{ème}}$ *vecteur de la base canonique de* $\mathbb{K}^n$*).*

2.2 Matrice représentative d'une famille de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{U} = (u_1, \ldots., u_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Pour $j = 1, \ldots, p$ on écrit la décomposition de x_j sur $\mathcal{U}$: $x_j = \sum_{i=1}^n x_j^i u_i$.

Définition 2 *La* matrice représentative *de* $(x_1, \ldots, x_p)$ *dans $\mathcal{U}$ est*

$$\mathrm{mat}(x_1, \ldots, x_p\ ;\ \mathcal{U}) = \left(u^{*i}(x_j)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \ (\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})).$$

Dans une écriture plus développée :

$$\mathrm{mat}(x_1, \ldots, x_p\ ;\ \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_p^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_p^n \end{pmatrix}$$

2.3 Matrice représentative d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n. Soient $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \le j \le p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \le i \le n}$ des bases de E et F respectivement. Soit f une application linéaire de E dans F.

Définition 3 *La* matrice représentative *de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est*

$$\boxed{\mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) = \left(v^{*i}(f(u_j))\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}}$$

($\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*).*

Il s'agit d'un cas particulier de la définition précédente : $\mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) = \mathrm{mat}(f(u_1), \ldots, f(u_p)\ ;\ \mathcal{V})$. Si l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U})$$

alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\boxed{f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i}$$

Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice représentative dans deux bases :

Théorème 1 *L'application*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} L_{\mathbb{K}}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-ev et de plus, si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, l'application linéaire* $f : E \to F$ *telle que* $\mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) = A$ *est l'unique application linéaire telle que* $f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i$ *pour* $j = 1, \ldots, p$.

Corollaire 2 *Si* $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ *et* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n$ *alors* $\dim_{\mathbb{K}}(L_{\mathbb{K}}(E, F)) = np$.

2.4 Matrice représentative d'un endomorphisme

Lorsque les espaces E et F sont égaux on choisit généralement (mais pas toujours) la même base au départ et à l'arrivée.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$une base de E. Soit f un endomorphisme de E.

Définition 4 *La* matrice représentative *de f dans la base $\mathcal{U}$ est*

$$\operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{U}) = \operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{U},\mathcal{U}) = \left(u^{*i}\left(f\left(u_j\right)\right)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

(qui appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

On a alors de même :

Théorème 2 *L'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} L_{\mathbb{K}}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{U}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Remarque 1 $\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E \ ; \ \mathcal{U}) = I_n$ *(et donc en fait, compte tenu du th. précédent,* $\operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{U}) = I_n \Leftrightarrow f = \mathrm{Id}_E$.

3 Produit de matrices

3.1 Matrice de $f \circ g$

Soient trois $\mathbb{K}$-ev E, F et G de dimensions respectives q, p, n. Soient des bases $\mathcal{U} = (u_k)_{1 \leq k \leq q}$ de E, $\mathcal{V} = (v_j)_{1 \leq j \leq p}$ de F et $\mathcal{W} = (w_i)_{1 \leq i \leq n}$ de G. Soient d'autre part des applications linéaires $g : E \to F$ et $f : F \to G$. On définit les matrices représentatives

- $A = \operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{W},\mathcal{V}) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$;
- $B = \operatorname{mat}(g \ ; \ \mathcal{V},\mathcal{U}) = (b_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}}$;
- $C = \operatorname{mat}(f \circ g \ ; \ \mathcal{W},\mathcal{U}) = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$.

$f \circ g$ étant entièrement déterminée par f et g, il doit exister une relation entre les matrices A, B et C.

calcul de $c_{i,k}$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,q]\!]$. $c_{i,k}$ est par définition $w^{*i}(f \circ g(u_k))$ or

$$g(u_k) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} v^{*j}(g(u_k)) \ v_j = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \ v_j$$

donc

$$\begin{aligned} f \circ g(u_k) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \ v_j\right) = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \ f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{n} w^{*i}(f(v_j)) \ w_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \ w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}\right)}_{= c_{i,k}} w_i \end{aligned}$$

On a donc

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.$$

3.2 Définition et propriétés du produit de matrices

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Définition 5 *On pose*

$$\boxed{C = A \times B = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}}$$

($\in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$) où pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$:

$$\boxed{c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.}$$

Ceci peut être représenté par le schéma suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & & b_{1,k} & \\ & & b_{2,k} & \\ & & \vdots & \\ & & b_{p,k} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & \boxed{c_{i,k}} & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Il résulte immédiatement du calcul précédent :

Théorème 3 *Si E, F et G sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, si $g \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $f \in L_{\mathbb{K}}(F,G)$ alors*

$$\operatorname{mat}(f \circ g \ ; \ \mathcal{W},\mathcal{U}) = \operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{W},\mathcal{V}) \times \operatorname{mat}(g \ ; \ \mathcal{V},\mathcal{U}).$$

Dans le cas particulier $E = F = G$ (et $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W}$) :

Théorème 4 *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de base $\mathcal{U}$, si f, $g \in L_{\mathbb{K}}(E)$ alors*

$$\operatorname{mat}(f \circ g \ ; \ \mathcal{U}) = \operatorname{mat}(f \ ; \ \mathcal{U}) \times \operatorname{mat}(g \ ; \ \mathcal{U}).$$

(Il s'agit dans ce cas de matrices carrées.)

Ces deux théorèmes permettent de transporter aux matrices les propriétés des endomorphismes grâce au procédé de *géométrisation*.

Proposition 7 *Soient q, p, $n \in \mathbb{N}^*$*

1. *Si A, $A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,* $(A + A')B = AB + A'B$ *;*
2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B, $B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,* $A(B + B') = AB + AB'$ *;*
3. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et λ, $\mu \in \mathbb{K}$,* $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu) AB$.

Proposition 8 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$.*

Proposition 9 *Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $I_p A = A$ et $AI_q = A$.*

Proposition 10 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,*

$${}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA.$$

3.3 Représentation matricielle de l'image d'un vecteur

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n et de bases $\mathcal{U} = (u_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$.

Soit $f \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$, et soient $x \in E$ et $y \in F$. On note les matrices représentatives $A = \text{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U})$, $X = \text{mat}(x\ ;\mathcal{U})$ et $Y = \text{mat}(y\ ;\ \mathcal{V})$. Alors

Théorème 5 *Il y a équivalence entre*

(1) $y = f(x)$;

(2) $Y = AX$.

Grâce au même calcul on peut obtenir

Théorème 6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *L'application* $f_A : X \mapsto AX$ *est l'unique application linéaire de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *dont la matrice représentative dans les bases canoniques est* A.

3.4 Produit par blocs

Soient 9 entiers naturels tous non nuls $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On effectue les "découpages par blocs" des matrices A et B comme ci-dessous. Alors le *produit par blocs* de A et B consiste en l'application de la relation suivante :

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

(avec $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ et $B_{i,j} \in \mathcal{M}_{p_i,q_j}(\mathbb{K})$).

Tout se passe donc comme si l'on multipliait simplement des matrices 2×2 entre elles. Ce résultat est bien sûr d'autant plus intéressant que certains des produits partiels sont faciles à calculer, p. ex. quand certains blocs sont nuls ou égaux à une matrice identité.

3.5 La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit des matrices est donc une loi de composition *interne* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et les propositions précédentes (7 à 9) montrent que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre dont l'élément unité est I_n. En outre, si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de base $\mathcal{U}$, les théorèmes 2 et 4 montrent que l'application $f \mapsto \text{mat}(f\ ;\ \mathcal{U})$ est un *isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbre* de $L_{\mathbb{K}}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation 2 *On note* $GL_n(\mathbb{K}) = \mathcal{U}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ *le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les éléments de $GL_n(\mathbb{K})$ sont les *matrices inversibles.* Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donc inversible ssi il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$.

Remarque 2 *On déduit immédiatement de la proposition 10 que si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *il en est de même de* ${}^tA$ *et :* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Les applications linéaires qui sont représentées par les matrices inversibles sont les isomorphismes de $\mathbb{K}$-ev :

Théorème 7 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-ev de* même *dimension* n, *de bases* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *resp. ; soit* $f \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$ *et soit* $A = \text{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U})$. *Il y a équivalence entre*

(1) f *est un isomorphisme de* E *sur* F ;

(2) $A \in GL_n(\mathbb{K})$,
auquel cas $\text{mat}(f^{-1}\ ;\ \mathcal{U},\mathcal{V}) = A^{-1}$.

Ce dernier théorème est particulièrement simple à énoncer dans le cas où $E = F$ (et $\mathcal{U} = \mathcal{V}$).

On en déduit notamment :

Corollaire 3 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension* n, *de base* $\mathcal{U}$ *et* $x_1, \ldots, x_n \in E$. *Soit* $A = \text{mat}(x_1, \ldots, x_n\ ;\ \mathcal{U})$. *Alors* $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une base de* E ssi $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

trace d'une matrice carrée

Définition 6 *Soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *La* trace *de* A *est la somme des termes diagonaux de* A *:*

$$\text{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Ses propriétés fondamentales sont les suivantes :

Proposition 11

1. $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est linéaire ;*
2. *Pour toutes matrices* A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

4 Changements de bases

4.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et soient deux bases $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ ("ancienne base") et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ ("nouvelle base") de E.

Définition 7 *La* matrice de passage *de* $\mathcal{U}$ *à* $\mathcal{V}$ *est*

$$\boxed{P = \text{mat}(v_1, \ldots, v_n\ ;\ \mathcal{U}) = \left(u^{*i}(v_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}}$$

($\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*).*

Cette définition peut s'interpréter de différentes façons, notamment

Proposition 12

1. $P = \text{mat}(\text{Id}_E\ ;\ \mathcal{U},\mathcal{V})$ *;*
2. $P = \text{mat}(f\ ;\mathcal{U})$ *si* f *est l'unique endomorphisme de* E *tel que* $f(u_i) = v_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Une matrice de passage est toujours inversible selon le corollaire 3. Plus précisément, avec les notations précédentes :

Proposition 13 *Si* P *est la matrice de passage de* $\mathcal{U}$ *à* $\mathcal{V}$, P *est inversible et* P^{-1} *est la matrice de passage de* $\mathcal{V}$ *à* $\mathcal{U}$.

Voyons maintenant comment les matrices de passage permettent de calculer l'effet d'un changement de base(s).

4.2 Action sur les vecteurs

Théorème 8 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Soit $x \in E$ et notons $X = \mathrm{mat}(x\ ;\ \mathcal{U})$ et $X' = \mathrm{mat}(x\ ;\ \mathcal{V})$. Alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$:*

$$\boxed{X = PX'.}$$

4.3 Action sur les matrices

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n. Soient des bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de E et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ de F. Soit $f \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Théorème 9 *Si $A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U})$, $A' = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}',\mathcal{U}')$ et si P (*resp.* Q) est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$ (*resp.* de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$) alors*

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$$

Un cas particulier important de ce th. est celui où l'espace vectoriel (et aussi les bases) sont les mêmes au départ et à l'arrivée.

Théorème 10 *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{U})$, $A' = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{U}')$ alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$:*

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

4.4 Matrices équivalentes

Soient A, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 8 *A est* équivalente *à B s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$B = Q^{-1}AP$$

Notation 3 $A \sim B$

On vérifie facilement :

Proposition 14 *La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

En outre, il résulte facilement du th. 9 :

Théorème 11 *Si A, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \sim B$* ssi *A et B sont "représentatives d'une même application linéaire[2]".*

4.5 Matrices semblables

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 9 *A est* semblable *à B s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$B = P^{-1}AP$$

On vérifie comme précédemment :

Proposition 15 *La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

De plus, par une démonstration similaire :

Théorème 12 *Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est semblable à B* ssi *A et B sont "représentatives d'un même endomorphisme[3]".*

5 Rang d'une matrice

Lemme 1 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, des $\mathbb{K}$-ev E, E', F, F' de dimensions respectives p, p, n, n, de bases $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ et des applications linéaires $f \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in L_{\mathbb{K}}(E', F')$ telles que*

$$A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U}) = \mathrm{mat}(g\ ;\mathcal{V}',\mathcal{U}').$$

Alors

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g.$$

Ce lemme permet de poser, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Définition 10 *Le* rang *de A est*

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, f$$

où f est une application linéaire (quelconque) d'un $\mathbb{K}$-ev E (quelconque) muni d'une base $\mathcal{U}$ (quelconque) dans un $\mathbb{K}$-ev F (quelconque) muni d'une base $\mathcal{V}$ (quelconque) tels que

$$A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U}).$$

Notant $\mathcal{U} = (u_1,\ ...,\ u_p)$ on a

$$A = \mathrm{mat}(f(u_1),\ ...,\ f(u_p)\ ;\mathcal{V}),$$

ce qui permet de dire que "le rang de A est le rang des (vecteurs-) colonnes de A". Cette remarque permet d'appliquer la *méthode du pivot*[4] pour calculer $\mathrm{rg}\, A$.

Mais on peut également remarquer que :

1. Si $A \sim B$, $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$;
2. Si $r = \mathrm{rg}\, A$, $A \sim J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ce qui, combiné avec la transitivité de "$\sim$", fournit la réciproque du 1. (et, bien sûr, $J_{n,p,r}$ est de rang r) ;
3. Si $A \sim B$, ${}^tA \sim {}^tB$. Cette dernière remarque, ajoutée au fait que ${}^tJ_{n,p,r} = J_{p,n,r}$ est aussi de rang r, donne enfin :

Théorème 13 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\left({}^tA\right).$$

Le rang d'une matrice A est donc aussi "le rang des lignes de A".

[2] Cela signifie que si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, de bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, et si $A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V},\mathcal{U})$, il existe des bases $\mathcal{U}'$ de E et $\mathcal{V}'$ de F telles que $B = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{V}',\mathcal{U}')$.

[3] C'est à dire que si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et de base $\mathcal{U}$, et si $A = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{U})$, il existe une base $\mathcal{U}'$ de E telle que $B = \mathrm{mat}(f\ ;\ \mathcal{U}')$.

[4] *cf.* T.D.