PCSI - mathématiques

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

1 Fonctions ln et exp

1.1 Fonction logarithme népérien

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

donc, ln est *la primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *qui s'annule en* 1.
Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

- $\ln : \,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$;
- ln est dérivable en x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- ln est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (puisque $\ln' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $f(x) = \ln(xy)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x > 0$, $f'(x) = y \times \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$. Ainsi f est également une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, f et ln diffèrent d'une constante : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \ln x + k$ pour tout $x > 0$. On obtient la valeur de k en substituant 1 à x : $f(1) = \ln y = \ln 1 + k = k$. On a donc obtenu :

Théorème 1 *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y. \tag{1}$$

(ln est un *morphisme de groupes* de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.)

Corollaire 1 *On en déduit :*

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln y - \ln x$
- $\ln(x^n) = n \ln x$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Quelques limites

On déduit de la dérivabilité de ln en 1:

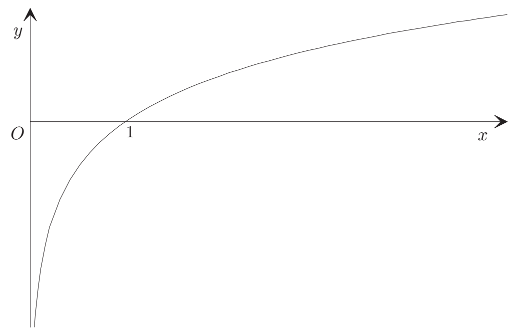
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.
- En $+\infty$: Remarquons d'abord que $\ln 2 > \ln 1 = 0$ (puisque ln $\uparrow$). Alors, à cause de la relation $\ln(2^n) = n \ln 2$, on voit que la fonction ln ne peut pas être majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. En d'autres termes (toujours à cause de la stricte croissance) : $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.
- Enfin $\lim_{0^+} \ln = -\infty$ se déduit du résultat précédent et de $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

Ces limites, combinées avec la stricte croissance et la dérivabilité de ln, montrent que :

Théorème 2 *La fonction* ln *est une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $]\lim_{0^+} \ln, \lim_{+\infty} \ln[\; = \;]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$.

Il en résulte que la fonction ln prend toute valeur réelle, en particulier la valeur 1.

Définition 1 *Le nombre* e *est l'unique réel dont le logarithme est égal à 1 :* $\ln \mathrm{e} = 1$.



fonction ln

1.2 Fonction exponentielle

Définition 2 *La fonction exponentielle réelle notée* exp *est par définition la réciproque de la bijection* ln *:*

$$\exp = \ln^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*.$$

Il résulte immédiatement de cette définition :

- $\exp(\ln y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\exp 0 = 1$; $\exp 1 = \mathrm{e}$;
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante ;
- $\lim_{-\infty} \exp = 0$; $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$,

et la relation (1) devient

Théorème 3 *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y. \tag{2}$$

(exp est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$.)

Corollaire 2 *La relation (2) entraîne pour* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *;*

- $\exp(y-x) = \frac{\exp y}{\exp x}$;
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$.

On obtient en particulier pour $x = 1$: $\exp(n) = (\exp 1)^n = \mathrm{e}^n$ ce qui justifie la

Notation 1 $\mathrm{e}^x = \exp x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité de exp

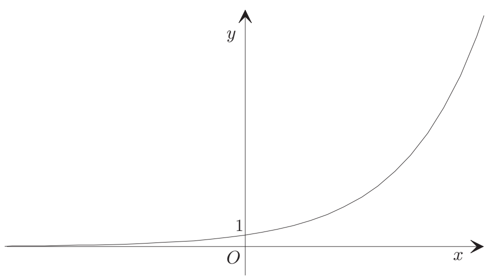
Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = \exp x$. $y \in \mathbb{R}_+^*$, ln est dérivable en y et $\ln'(y) = \frac{1}{y} > 0$ (donc $\neq 0$). Il en résulte (voir le cours de dérivabilité) que exp est dérivable en x et :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x.$$

Comme ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Théorème 4 exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Corollaire 3 exp *est dérivable à tout ordre ($\mathcal{C}^\infty$) sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.



fonction exp

2 Fonctions logarithmes et exponentielles

2.1 Homothéties de $\mathbb{R}$

Théorème 5 *Soit* $a \in \mathbb{R}$. $x \mapsto a\,x$ *est l'unique application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que :*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *;*
2. f *est continue en 0 ;*
3. $f(1) = a$.

2.2 Fonctions exponentielles

Théorème 6 *Soit* $a \in\ ]0, +\infty[$. *Il existe une application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et une seule telle que :*

1. $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *;*
2. f *est continue en 0 ;*
3. $f(1) = a$.

Définition 3 *On la note* $\exp_a$ *: exponentielle de base* a.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp_a(x) = \mathrm{e}^{x\,\ln a}.$$

$\exp_a$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp_a(n) = (\exp_a(1))^n = a^n$ ce qui justifie la

Notation 2 $\exp_a(x) = a^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

En particulier : $\exp_{\mathrm{e}} = \exp$.

Théorème 7 $\exp_a$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* n *entier naturel :*

$$(\exp_a)^{(n)} = (\ln a)^n \exp_a$$

Proposition 1

1. $1^x = \exp_1(x) = 1$.
2. *Si* $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+$ *et* $\exp_a$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.
3. *Si* $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ *et* $\exp_a$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *strictement décroissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Formules

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x\,a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
2. $\ln(a^x) = x\,\ln a$,
3. $(a\,b)^x = a^x\,b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
4. $(a^x)^y = a^{x\,y}$.

2.3 Fonctions logarithmes

Théorème 8 *Soit* $a \in\ ]0, +\infty[\ - \{1\}$. *Il existe une application* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *et une seule telle que*

1. $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *;*
2. f *est continue en 1 ;*
3. $f(a) = 1$.

Définition 4 *On la note* $\log_a$ *: logarithme de base* a.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

et :

$$\log_a = (\exp_a)^{-1}$$

en particulier :

$$\log_{\mathrm{e}} = \ln$$

Proposition 2

1. *Si* $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty$ *et* $\log_a$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *strictement croissante de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Si* $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty$ *et* $\log_a$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *strictement décroissante de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

Formules

1. $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

2. $\log_a(b^x) = x\,\log_a(b)$, $\log_b(x) = \log_b(a)\,\log_a(x)$

3 Fonctions puissances

Théorème 9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et une seule telle que*

1. *$f(x\,y) = f(x)\,f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;*

2. *f est continue en 1 ;*

3. *$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^\alpha$.*

Définition 5 *f est la fonction puissance α notée provisoirement P_α.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$P_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha\,\ln x}$$

d'où :

$$P_\alpha(x)\,P_\beta(x) = P_{\alpha+\beta}(x)$$

Lorsque $n \in \mathbb{Z}$, $P_\alpha(n) = \left(\mathrm{e}^{\ln n}\right)^\alpha = n^\alpha$ ce qui justifie la

Notation : $P_\alpha(x) = x^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

P_α est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et :
$P'_\alpha(x) = \alpha\,x^{\alpha-1}$, $P''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}$, ...

$$P_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Cas 1 $\alpha > 0$

x	0		1		$+\infty$
$P'_\alpha(x)$		> 0	α	> 0	
P_α	0^+	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cas 2 $\alpha < 0$

x	0		1		$+\infty$
$P'_\alpha(x)$		< 0	α	< 0	
P_α	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0^+

- Si $\alpha > 0$, on prolonge P_α par continuité en posant $P_\alpha(0) = 0$.

- Si $\alpha > 1$, P_α est dérivable en 0 et $P'_\alpha(0) = 0$.

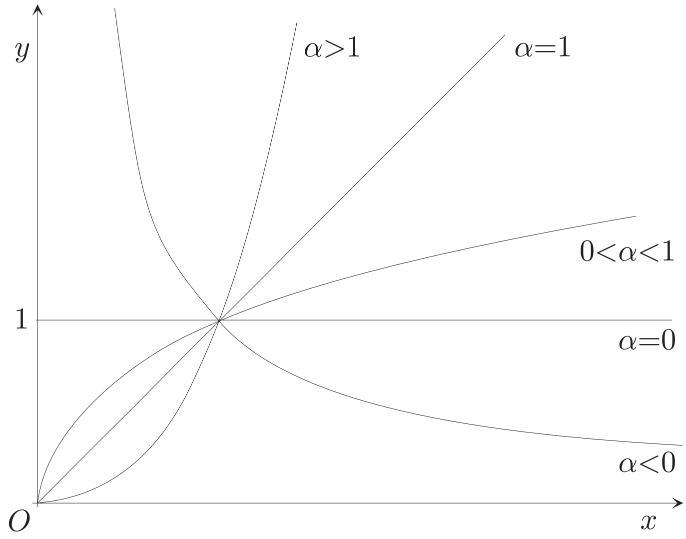
- Si $0 < \alpha < 1$, $P'_\alpha(0) = +\infty$

- $P''_\alpha(x) = \alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}$ est du signe de $\alpha\,(\alpha-1)$ donc P_α est :

  – convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$,

  – concave sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \in [0, 1]$.

Ces remarques sont résumées dans le schéma suivant :



fonctions puissances

Remarques

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Si $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $x^r = (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$
- Plus généralement si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(P_\alpha)^{-1} = P_{\frac{1}{\alpha}}$.

Fonction racine $n$ième sur $\mathbb{R}$ si n est impair

Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application strictement croissante et dérivable, donc bijective, et *impaire* ($P_n(-x) = -P_n(x)$). On peut alors considérer la bijection réciproque $\sqrt[n]{\ } = P_n^{-1}$ (impaire elle aussi). Si $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = P_{\frac{1}{n}}(x)$.

4 Hiérarchie des fonctions

Lemme 1 $\ln x \leq x - 1$ *pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

Cette simple remarque permet de voir que “toute puissance de $\ln x$ tend moins vite vers $+\infty$ que toute puissance (> 0) de x” (pour $x \to +\infty$) :

Théorème 10 *Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

On dit que $(\ln x)^\alpha$ est *négligeable* devant x^β en $+\infty$ et on écrit : $(\ln x)^\beta = o\,(x^\alpha)$ $[x \to +\infty]$.

Corollaire 4 *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$:*

1. *$\lim_{x\to0^+} x^\alpha\,|\ln x|^\beta = 0$;*

2. *$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$;*

3. *$\lim_{x\to-\infty} x^\beta\,\mathrm{e}^{\alpha x} = 0$.*