PCSI - mathématiques

Développements limités

Les développements limités (DL) constituent l'outil le plus fin pour l'étude locale d'une fonction.

- Ils permettent de calculer des limites et des équivalents ;
- Ils supportent toutes les opérations algébriques, y compris les additions ;
- Ils permettent de régler la précision de l'analyse aussi loin que souhaité de façon à comparer les positions d'une courbe et de sa tangente ou d'une autre courbe.

En contrepartie, on court le risque de faire trop de calculs par rapport à l'objectif recherché.

1 DL au voisinage de 0

On étudie des fonctions numériques définies *sur un voisinage de* 0, càd (au moins) sur un intervalle ouvert $]-r, r[$ avec $r > 0$.

1.1 Définition et généralités

n est un entier naturel (éventuellement nul).

Définition 1 *f admet un* développement limité à l'ordre n en 0 ($\mathrm{DL}_n(0)$) *s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

(1) $\deg P \leq n$

(2) $f(x) - P(x) = o(x^n)\ [x \to 0]$

P désigne un *polynôme* (voir cours d'algèbre), càd que $P(x)$ est de la forme $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ avec a_0, ..., $a_n \in \mathbb{R}$.

Avant de pouvoir parler *du* $\mathrm{DL}_n(0)$ de f il faut vérifier le

Lemme 1 *Le polynôme P vérifiant* (1) *et* (2) *de la définition 1 est alors* unique.

Définition 2 *P est la* partie régulière *du développement limité à l'ordre n en 0 de f notée*

$$P = \mathrm{reg}_n(f).$$

On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + o(x^n)\ [x \to 0] \\ &= a_0 + ... + a_n x^n + o(x^n)\ [x \to 0] \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, toutes les relations de "o" écrites auront lieu en 0 et la mention $[x \to 0]$ sera généralement sous-entendue.

L'exemple suivant est important car il n'utilise que l'identité de sommation des termes d'une suite géométrique. Grâce aux opérations sur les DL (§ suivant), il permet de déduire les DL de plusieurs fonctions usuelles.

Exemple 1

Si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. C'est vrai en particulier si $x \in\ ]-1, 1[$, qui est un voisinage de 0. On écrit cela $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ soit :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

En appliquant la propriété de substitution (proposition 2.), on en déduit les DL de

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$;
- $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + o(x^{2n})$ ou $o(x^{2n+1})$ [1] ;
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ ou $o(x^{2n+1})$ [1].

Remarque 1 *C'est le "$o(x^n)$" qui fixe l'ordre du DL et non le degré exact du polynôme P. Ainsi, $f(x) = x^2 + o(x^3)$ et $g(x) = x^3 + o(x^3)$ sont tous deux des DL à l'ordre 3.*

Voyons ce que donne cette définition pour les premières valeurs de n :

Remarque 2 *f a un $DL_0(0) \Leftrightarrow f$ a une limite en 0 ;*
f a un $DL_1(0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en 0.

Attention Si $n \geq 2$, "f a un $\mathrm{DL}_n(0)$" *n'est pas*, en général, équivalent à "f est n fois dérivable en 0"

Contre-exemple $f(x) = 1 + x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La propriété suivante montre en outre qu'il est possible de "raccourcir" un DL :

Proposition 1 *(troncature ou "petit lit de Procuste[2]") Si f a un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$ et si $m \leq n$, alors f a un $DL_m(0)$ donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m + o(x^m)$. On écrit*

$$\mathrm{reg}_m(f) = \overline{\mathrm{reg}_n(f)}^{\,m}$$

(lire "tronquée au degré m")

[1] En effet, le terme non nul suivant serait en x^{2n+2} donc lui-même $o(x^{2n+1})$. Cette remarque permet parfois de gagner un ordre de DL lorsque la fonction étudiée est (im)paire, voir le corollaire 1.3.

[2] Procuste était un bandit légendaire de la mythologie grecque. Non content de détrousser les voyageurs de passage, il les suppliciait en les forçant à s'allonger sur un (petit) lit et en coupant tout ce qui dépassait.

Toutefois, pour les voyageurs de petite taille, le supplice consistait à les étirer à la longueur du lit, ce qui ne présente pas d'analogie avec les opérations sur les DL.

Procuste finit par se voir appliquer sa propre torture par Thésée.

La propriété suivante est en fait une caractéristique de la relation de négligeabilité. Elle permet de substituer une quantité φ dans une telle relation, à condition que φ tende vers la bonne valeur (en l'occurrence, 0) :

Proposition 2 *(substitution) Si* $f(x) = P(x) + o(x^n)$ *et si* $\lim_{\mathcal{B}} \varphi = 0$ *alors* $f \circ \varphi = P \circ \varphi + o(\varphi^n)$ $[\mathcal{B}]$.

Cette propriété est plus fréquemment utilisée dans les cas suivants :

Corollaire 1 *Si* $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$ *alors*

1. $f(x^m) = a_0 + a_1 x^m + ... + a_n x^{nm} + o(x^{nm})$;
2. $f(\lambda x) = a_0 + a_1 \lambda x + ... + a_n \lambda^n x^n + o(x^n)$;

   Le cas $\lambda = -1$ combiné au lemme 1 fournit une propriété intéressante des fonctions (im)paires :
3. f *paire* $\Rightarrow a_{2k+1} = 0$ $(\forall k)$;

   f *impaire* $\Rightarrow a_{2k} = 0$ $(\forall k)$.

Autrement dit, les DL des fonctions paires (*resp.* impaires) ne comportent que des termes d'indices pairs (*resp.* impairs). De plus, en combinant cette remarque avec la proposition 4 appliquée à la fonction f et à $g : x \mapsto f(-x)$ on obtient que le DL de la partie paire (*resp.* impaire) de f est la partie paire (*resp.* impaire) du DL de la fonction f.

Un DL permet en outre d'obtenir un équivalent :

Proposition 3 *Si* $f(x) = a_p x^p + ... + a_n x^n + o(x^n)$ *avec* $\boldsymbol{a_p \neq 0}$ *alors* $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p$.

En d'autres termes, une fonction est équivalente au premier terme *non nul* de son DL.

On voit donc que lorsque le but d'un DL n'est que de fournir un équivalent, il ne faut pas pousser trop loin les calculs. Il vaut mieux compléter un calcul de DL trop court par les termes qui manquent que calculer des termes inutiles.

1.2 DL donné par la formule de Taylor-Young

Le théorème suivant n'est autre que l'énoncé de la formule de Taylor-Young en 0 en termes de DL (voir cours d'analyse). Il complète la remarque 2 en montrant qu'entre "f est n fois dérivable en 0" et "f a un $\mathrm{DL}_n(0)$" il existe une implication, à défaut d'équivalence :

Théorème 1 *Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

On déduit de cette formule les DL des fonctions usuelles dont les dérivées successives sont faciles à calculer.

Exemple 2

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$;
- $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$ ([3]) ;
- $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$ ([3]) ;
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$ ([3]) ;
- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$ ([3]) ;
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

On déduit de ce dernier résultat en prenant $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ et en substituant éventuellement $-x$ ou $\pm x^2$ à x les DL à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}$.

1.3 Opérations sur les DL

Les DL respectent toutes les opérations algébriques classiques. A noter toutefois que l'inverse et le quotient seront traités comme des compositions avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$; *cf.* plus loin.

1.3.1 DL d'une combinaison linéaire

Cette propriété prend en compte le cas d'une somme de fonctions ($\lambda = \mu = 1$). Combinée avec la proposition 3, elle permet d'utiliser un DL pour obtenir un équivalent d'une somme ou d'une différence.

Proposition 4 *Si* $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ *et si* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + o(x^n)$ *ce qu'on peut noter*

$$\operatorname{reg}_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{reg}_n(f) + \mu \operatorname{reg}_n(g).$$

1.3.2 DL d'un produit ; d'une puissance

Théorème 2 *Si f et g ont des $DL_n(0)$, alors fg a un $DL_n(0)$ et*

$$\operatorname{reg}_n(fg) = \overline{\operatorname{reg}_n(f) \operatorname{reg}_n(g)}^{\,n}.$$

Théorème 3 *Si f a un $DL_n(0)$, alors f^m a un $DL_n(0)$ et*

$$\operatorname{reg}_n(f^m) = \overline{(\operatorname{reg}_n(f))^m}^{\,n}.$$

Ce théorème 3 n'est pas une conséquence triviale du précédent, car on ne sait pas *a priori* si les opérations de multiplication et de troncature au degré n *commutent.*

Exemple 3 $\cos^2 x$ *; ordre 4*

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$ donc $\cos^2 x = 1 - 2.\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^4}{24}\right) + o\left(x^4\right) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$ (en fait $o\left(x^5\right)$).

1.3.3 Produit par x^p ; par $1/x^p$

Lorsque la fonction par laquelle on multiplie est une puissance entière de x, nul besoin d'invoquer le théorème 2. Il s'agit d'un simple décalage des termes dans le DL de la fonction.

[3] Voir la note 1 page 1.

Proposition 5 *Si f a un $DL_n(0)$ donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

alors $x \mapsto x^p f(x)$ a un $DL_{n+p}(0)$ donné par

$$x^p f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{1+p} + ... + a_n x^{n+p} + o\left(x^{n+p}\right).$$

Pour "diviser par x^p" un DL, il faut s'assurer que le terme x^p est effectivement présent en facteur.

Proposition 6 *Si f a un $DL_n(0)$ donné par*

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

alors $x \mapsto \frac{f(x)}{x^p}$ a un $DL_{n-p}(0)$ donné par

$$\frac{f(x)}{x^p} = a_p + a_{P+1} x + ... + a_n x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right).$$

Exemple 4

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)$ donc $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^5\right)$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$ donc $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$ d'où $\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o\left(x^3\right)$.

1.3.4 DL d'une "primitive"

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant montre que "le DL d'une primitive est la primitive du DL", autrement dit : connaissant le DL de f' on en déduit celui de f.

Théorème 4 *$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I. Si f' a un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, f a un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est*

$$Q(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Q est bien sûr la primitive de P telle que $Q(0) = f(0)$.

Attention Le passage inverse n'est pas possible. En somme, on peut primitiver les DL, mais on ne peut pas les dériver.

Contre-exemple $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Parmi les DL rencontrés précédemment figurent les dérivées de certaines fonctions classiques. Grâce au théorème 4 on en déduit les DL de ces fonctions.

Exemple 5

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ donc :
  $\ln(1+x) = \ln 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$;
- $\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$ s'en déduit par substitution ;
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$ donc :
  $\arctan x = \arctan 0 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$;
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(-x^2\right) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} x^4 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o\left(x^5\right)$ donc :
  $\arcsin x = \arcsin 0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^6\right)$.

1.3.5 DL d'une fonction composée

Le théorème relatif à la composition est plus simple à appliquer qu'à énoncer :

Théorème 5 *f, g ont des $DL_n(0)$ donnés par $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n + o(t^n)$. Alors la fonction $x \mapsto h(x) = g(f(x) - a_0)$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est*

$$b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k P_k(x)$$

où

$$P_k(x) = \operatorname{reg}_n\left(\left(f(x) - a_0\right)^k\right).$$

Pratiquement On écrit $t = f(x) - a_0 = a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$ et on calcule (grâce au théorème 3) les DL de t^2 puis $t^3 = t \times t^2$, $t^4 = \left(t^2\right)^2$ etc.

Exemple 6 *DL de $e^{\cos x}$ à l'ordre 6 en 0.*

- $e^{\cos x} = e^{1+(\cos x - 1)} = e.\, e^{\cos x - 1}$ or
  $t = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right)$;
- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + o\left(t^6\right)$:

$$\begin{array}{r|rr}
 & & 1 \\
1\times & t = & -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right) \\
\frac{1}{2}\times & t^2 = & \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o\left(x^6\right) \\
\frac{1}{6}\times & t^3 = & -\frac{x^6}{8} + o\left(x^6\right) \\
 & t^4, t^5, t^6 = & o\left(x^6\right) \\
\hline
 & e^{\cos x - 1} = & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + o\left(x^6\right)
\end{array}$$

qu'il faut multiplier par e pour avoir le DL cherché

On peut aussi appliquer ce résultat avec $g(t) = \frac{1}{1 \pm t}$ pour obtenir des DL d'inverses ou de quotients.

Exemple 7 *DL $\frac{1}{\cos x}$ et de $\tan x$ à l'ordre 7 en 0.*

On écrit $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (\cos x - 1)}$ et :
$t = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^7\right)$;
$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + o\left(t^7\right)$ d'où :

$$\begin{array}{r|rr}
 & & 1 \\
(-1)\times & t = & -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^7\right) \\
1\times & t^2 = & \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o\left(x^7\right) \\
(-1)\times & t^3 = & -\frac{x^6}{8} + o\left(x^7\right) \\
 & t^4,\ ...,\ t^7 = & o\left(x^7\right) \\
\hline
 & \frac{1}{\cos x} = & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o\left(x^7\right)
\end{array}$$

que l'on multiplie par le $DL_7(0)$ de :
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o\left(x^7\right)$ pour obtenir :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$$

Ce DL d'une fonction pourtant classique n'est pas des plus faciles à retrouver ; il vaut mieux le connaître aussi loin que possible. Comme toujours, lorsque le DL d'une fonction circulaire (*resp.* hyperbolique) présente une alternance de signe, celui de la fonction hyperbolique (*resp.* circulaire) correspondante contient les mêmes coefficients mais sans l'alternance de signe. Par conséquent, un calcul du même type montrerait que $\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$.

2 DL au voisinage de a $(a \in \overline{\mathbb{R}})$

Lorsque la fonction est à étudier au voisinage d'un autre point que 0, on effectue un changement de variable de façon à se ramener en 0. L'essentiel est de ne pas perdre de vue les limites des quantités manipulées, de manière à ne pas appliquer un DL à un endroit incorrect.

2.1 DL au voisinage de a $(a \in \mathbb{R})$

f est définie au voisinage de a, càd (au moins) sur un intervalle $]a-r, a+r[$ avec $r > 0$.

Définition 3 *f admet un DL à l'ordre n en a s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$ $[x \to a]$*

On se ramène toujours à un DL en 0 par :

Proposition 7 *Il y a équivalence entre*

1. $f(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$ $[x \to a]$
2. $f(a+t) = P(t) + o(t^n)$ $[t \to 0]$

On peut parfois obtenir directement un DL en a grâce à la formule de Taylor-Young en a :

Remarque 3 *Si $a \in \mathbb{R}$ et si f est n fois dérivable en a alors il existe une fonction ε telle que $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ et*

$$f(a+t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + t^n \varepsilon(t).$$

La quantité "$t^n\varepsilon(t)$" est précisément un "$o(t^n)$ $[t \to 0]$" donc on est directement dans les conditions de la proposition précédente. Cette remarque n'est intéressante que si le calcul des dérivées successives de f en a est facile.

2.2 DL au voisinage de $\pm\infty$

f est définie au voisinage de $+\infty$, càd au minimum sur un $[A, +\infty[$ pour un certain réel A.

Définition 4 *f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ $[x \to +\infty]$*

Remarque 4 *Pour qu'une telle écriture existe, il faut donc que f ait une limite finie en $+\infty$.*

On se ramène toujours à un DL en 0 par :

Proposition 8 *Il y a équivalence entre*

1. $f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ $[x \to +\infty]$
2. $f\left(\frac{1}{t}\right) = P(t) + o(t^n)$ $[t \to 0^+]$

On énoncerait de même les définitions et propriétés analogues en $-\infty$.

Exemple 8 *DL de $\sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.*

$f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2} = x\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$ (pour $x > 0$) or :

- $\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{a}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$;
- $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$
$$= 1 + \frac{1}{3x} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + \frac{5}{81x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

donc $\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{3x} + \frac{13}{36x^2} - \frac{5}{81x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ d'où $f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{36x} - \frac{5}{81x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
On en déduit notamment que $\lim_{+\infty} f = -\frac{1}{3}$ et comme $f(x) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{36x} - \frac{5}{81x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{13}{36x}$, cette limite est atteinte par valeurs supérieures.

3 Développements asymptotiques

On parle de *développement asymptotique* (ou de *DL généralisé*) pour les cas qui ne rentrent pas dans l'échelle de comparaison des puissances entières positives de x. On peut rencontrer

- des puissances négatives de x ;
- des puissances non entières de x ;
- des fonctions d'autres échelles de comparaison telles que $x^p(\ln x)^{-q}$ en 0^+.

On se contentera de donner quelques exemples. Le principe des calculs est le même. L'essentiel est de ne pas perdre de vue les *limites* des quantités manipulées.

Exemple 9 *DA de* cotan *à l'ordre* 3 *en* 0.

Exemple 10 *DA de $\sqrt[4]{x^4+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^3+\sqrt{x}}$ à l'ordre 5 en $+\infty$*

Exemple 11 *DA de $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ dans l'échelle des $\left(x^p(\ln x)^{-q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ à l'ordre $(3,0)$ en 0^+.*

3.1 Application à l'étude d'une fonction

Lorsqu'on a à étudier une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les branches infinies et les points "à problème" peuvent être avantageusement traités en utilisant des DL aux endroits appropriés.

Exemple 12 *Etudier*

$$f : x \mapsto \frac{x^2-2x-1}{x}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

Pour cette étude de fonction on va utiliser des DL

- en $0^\pm$ pour étudier un éventuel prolongement par continuité en 0 ;
- en $\pm\infty$ pour préciser la nature des branches infinies de la courbe.

Ces calculs ne dispensent pas d'une classique étude de variations. Rappelons que les DL ne fournissent que des renseignements *locaux.*