Oraux des "Minettes" - session 2001

Planche 1
I) Donner la nature de la surface : $2x^2+2y^2+z^2+2xy-2yz=a^2$.
II) Étudier le tracé de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.
En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

Planche 2
I) Nature des séries de terme général

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{\sin n}{n^2}\right)^\alpha} \ (\alpha > 0).$$

II) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$.

Planche 3
I) Calculer le volume du solide défini par :
$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid z^2 \leq 2xy,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1\right\}$.
II) Calculer la puissance n-ième de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Planche 4
I) Cours : formules de Frenet dans l'espace.
II) Calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
III) Soit la série entière $\sum \frac{x^n}{n+(-1)^n}$.
Trouver son rayon de convergence, étude aux bornes et somme.

Planche 5
I) Étudier la convergence de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
Donner un équivalent simple de $J_n = \int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$
II) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2(X-2)$.

Planche 6
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, et on note $\mathcal{R}$ le repère cartésien canonique.
Soit a et b deux réels strictement positifs, P et Q deux points distincts tels que P soit d'abscisse a et Q d'ordonnée b.
Déterminer le lieu de la projection orthogonale de l'origine O sur (PQ).

Planche 7
I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $(A-I_3)^2$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Sans préparation : A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1}.
II) On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\mathrm{d}t$
1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 au voisinage de $+\infty$.

Planche 8
Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Exprimer M^n en fonction de M et I_3 (on calculera $M^2+2M-3I_3$ et le reste de la division euclidienne de X^n par X^2+2X-3).

Planche 9
Existe-t-il une solution de l'équation différentielle $y'+\cos y = 0$ vérifiant $y(\pi) = 0$?

Planche 10
Dans un plan affine euclidien, on donne la droite D_θ d'équation $D_\theta : x\sin 2\theta + 2y\cos\theta + 4\cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$.
Déterminer l'ensemble des points équidistants de D_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Planche 11
Soit $u_n = n^{\frac{n+1}{n}} - (n+1)^{\frac{n}{n-1}}$. Étudier la convergence de (u_n).

Planche 12
Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$.
Montrer que (u_n) converge, puis que sa limite est entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Planche 13
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que pour tout $n \geq 1$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.

Planche 14
I) Soit l'équation complexe $(E) : (z^2+1)^n - (z+\mathrm{i})^{2n} = 0$.
1. Vérifier que $-\mathrm{i}$ est solution de (E) et trouver sa multiplicité.
2. Quelles sont les autres solutions de (E) ?
Donner leur nombre et leur forme algébrique. (On pourra se ramener à une équation du type $Z^n = 1$.)
II) Comportement en $\pm\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{e}^{1/x}$.

Planche 15

Soit $(\alpha,\beta,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$. Calculer $\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n \,\mathrm{d}t$.

Planche 16

I) Déterminer $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{1-x+\ln x}$.

II) Résoudre $z^{2n}-1=0$, puis factoriser $\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$.
En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$.

Planche 17

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour $k\in\mathbb{R}$, on pose $A_k=\{u\in\mathcal{L}(E)\mid u^2=ku\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que u soit inversible. Donner son inverse.

2. On suppose $k\neq 0$. Montrer que $\operatorname{Im} u=\{x\in E\mid u(x)=kx\}$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans E. Que peut-on dire si $k=0$?

3. Pour $k\neq 0$, montrer que $u+v\in A_k$ si et seulement si $u\circ v=v\circ u=0$. Montrer que $\ker(u+v)=\ker u\cap\ker v$ et $\operatorname{Im}(u+v)=\operatorname{Im} u+\operatorname{Im} v$.

Planche 18

I) Soit $f: x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{-x^2}P_n(x)$, où P_n est un polynôme dont on déterminera le degré, la parité et le coefficient dominant.

2. Trouver une relation de récurrence entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1} (en utilisant la relation $f'+2xf=0$).

3. En déduire que $P_n'=-2nP_{n-1}$ et que P_n est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

II) Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer sans calcul le noyau et l'image de f.

Planche 19

I) Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier la convergence de (un).

II) Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$, associée à $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ où f est représentée par $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Planche 20

I) Trouver les primitives de $\varphi: x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times\frac{1}{2x-1}$, en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

II) Question de cours : si on a un endomorphisme u et une base $\mathcal{B}$, comment trouver la matrice de u dans $\mathcal{B}$? Comment trouver la matrice de u dans une autre base $\mathcal{B}'$? Si on a P et que l'on demande de vérifier $P^{-1}=$..., comment faire?

Planche 21

I) Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation : $2x+y-z=0$.

II) Étudier la courbe d'équations $\begin{cases} x(t)=\sin t\\ y(t)=\frac{\cos^2 t}{2-\cos t}\end{cases}$.

Planche 23

I) Intégrer $y''+6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}+2\,\mathrm{e}^{-3x}$.

II) Calculer la limite en 0 de $f(x)=\frac{1}{\sin^5 x}\left(x-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\tan x\right)$.

Planche 24

I) Soit $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\mathrm{e}^x-1)$.
Trouver le domaine de définition, calculer la dérivée, les asymptotes et tracer la courbe représentative de f.

II) Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; calculer A^n. A est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.