

# CONCOURS COMMUN 2004

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve Spécifique de Mathématiques (filiale MPSI)

**Mercredi 19 mai 2004 de 08h00 à 12h00**

#### **Instructions générales :**

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.  
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.  
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

**L'emploi d'une calculatrice est interdit**

**Barème indicatif : 10 points pour chaque problème**

### **Premier problème**

#### **I. Résolution d'équations différentielles**

1. Résoudre l'équation différentielle :  $z' + z \operatorname{th} t = 0$ , où  $z$  est une fonction de la variable réelle  $t$  à valeurs réelles.

Trouver la solution  $z_1$  de cette équation telle que  $z_1(0) = 1$ .

2. Résoudre l'équation différentielle :  $z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$ .

Trouver la solution  $z_2$  de cette équation telle que  $z_2(0) = 0$ .

## II. Etude d'un arc paramétré

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe  $(\Gamma)$  représentée

paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th} t \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

3. Démontrer que  $(\Gamma)$  admet un axe de symétrie.
4. Etudier les branches infinies de  $(\Gamma)$ .
5. Etudier les variations de  $x$  et  $y$  ; faire un tableau.
6. Préciser la nature du point  $A$  d'abscisse 0, ainsi que la tangente en ce point.
7.
  - a) Calculer  $\operatorname{ch} t$  et  $\operatorname{th} t$  lorsque  $\operatorname{sh} t = 1$ . Calculer la valeur de  $t$  correspondante (on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme népérien).
  - b) Déterminer le point  $B$  de  $(\Gamma)$  où la tangente a pour coefficient directeur  $-1$  ; déterminer une équation cartésienne de la tangente en  $B$  à  $(\Gamma)$ .
8. Donner l'allure de la courbe  $(\Gamma)$ .
9.
  - a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à  $(\Gamma)$  au point  $M$  de paramètre  $t$ .
  - b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point  $N$ . Calculer la distance  $MN$ .

## III. Etude d'intégrales et de suites

Soient un réel  $x$  et  $k$  un entier strictement positif. On pose  $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$ .

10. Calculer  $I_1(x)$  (on pourra faire le changement de variable  $u = e^t$ ).
11. Calculer  $I_2(x)$ .
12.
  - a) En intégrant par parties, trouver une relation entre  $I_{k+2}$  et  $I_k$  (on pourra remarquer que  $\frac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$ ).
  - b) En déduire  $I_3$  et  $I_4$ .
13. Démontrer que la fonction  $I_k : x \mapsto I_k(x)$  est :
  - a) impaire.
  - b) continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - c) de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
14. Calculer  $I_k'$ ,  $I_k''$  et  $I_k'''$ .
15. Donner le développement limité de  $I_k$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.
16. Démontrer que  $I_k$  est monotone sur  $\mathbb{R}$ .

17. On se propose, pour  $k$  fixé, d'étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = I_k(n)$ .
- Démontrer que cette suite est monotone.
  - Démontrer que, pour tout réel  $t$ ,  $\frac{1}{\operatorname{ch} t} \leq 2e^{-t}$  ; en déduire que la suite converge.
18. On pose, sous réserve d'existence,  $J_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$ , notée  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$ .
- Démontrer l'existence de  $J_k$ .
  - Calculer  $J_1$  et  $J_2$ .
  - Calculer  $J_k$ .

## Deuxième problème

On désigne par  $E$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme  $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont des nombres réels.

### I. Etude de structures

- Démontrer que  $E$ , muni de l'addition des matrices et de leur produit par un scalaire réel, est un espace vectoriel réel.
  - Trouver une base et la dimension de  $E$ .
- Démontrer que  $E$  est stable pour la multiplication des matrices.
  - En déduire que  $E$ , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau.
  - Cet anneau est-il commutatif ?
- On désigne par  $G$  l'ensemble des matrices de  $E$  telles que  $a > 0$  et  $b > 0$ .  
Démontrer que  $G$  est un groupe multiplicatif.

### II. Puissances d'une matrice et suites

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$ .

- On suppose  $a \neq b$ . Démontrer que  $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$ .
  - On suppose que  $a = b$ . Calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$  ; on exprimera les coefficients en fonction de  $a$  et  $c$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$ , en convenant que

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout } x \text{ réel, } \varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses.
- Démontrer que, pour  $x$  fixé, la suite de terme général  $\varphi_n(x)$  converge et que sa limite est  $e^x$ .
- On suppose  $a \neq b$ .

Calculer  $\alpha_n, \beta_n$  et  $\gamma_n$  en fonction de  $a, b, c, \varphi_n(a)$  et  $\varphi_n(b)$ .

Démontrer que les suites  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$  et  $(\gamma_n)_n$  ont des limites respectives  $\alpha, \beta, \gamma$  que l'on calculera.

- On suppose  $a = b$ .

Calculer  $\alpha_n, \beta_n$  et  $\gamma_n$  en fonction de  $a, c, \varphi_{n-1}(a)$  et  $\varphi_n(a)$ .

Démontrer que les suites  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$  et  $(\gamma_n)_n$  ont des limites respectives  $\alpha, \beta, \gamma$  que l'on calculera.

6.

Pour tout  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$ , on pose  $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ont été définis à la

question 5, et on note  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par  $f(A) = A'$ .

- L'application  $f$  est-elle linéaire ?
- L'application  $f$  est-elle injective ?
- L'application  $f$  est-elle surjective ?
- Déterminer l'image de  $E$  par  $f$ .

7. On suppose maintenant que  $0 < a < \ln 2$  et  $0 < b < \ln 2$ .

On pose, pour  $A \in E$ ,  $\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (f(A) - I)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$  et  $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ .

- Calculer  $a_n, b_n$  et  $c_n$  lorsque  $a \neq b$ , puis lorsque  $a = b$  (on pourra utiliser les résultats de la question 4).
- Démontrer que si  $0 < x < 1$ , la suite de terme général  $\psi_n(x)$ ,  $x$  fixé, converge vers  $\ln(1+x)$ .
- Dans chacun des deux cas précédents, démontrer que les suites  $(a_n)_n, (b_n)_n$  et  $(c_n)_n$  ont respectivement pour limites  $a, b$  et  $c$ .

**FIN DU SUJET**